

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

## 12.1 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

- Todos os problemas de eletricidade e magnetismo podem ser resolvidos a partir das equações de Maxwell:

1. Lei de Gauss:  $\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$

2. Lei de Gauss para o magnetismo:  $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$

3. Lei de Faraday:  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$

4. Lei de Ampere:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

## 12.2 A EQUAÇÃO DE ONDA PARA ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

- Revisão da equação de onda numa corda:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Onde :

$Y(x,t)$  - posição de pontos de uma corda num instante  $t$ .

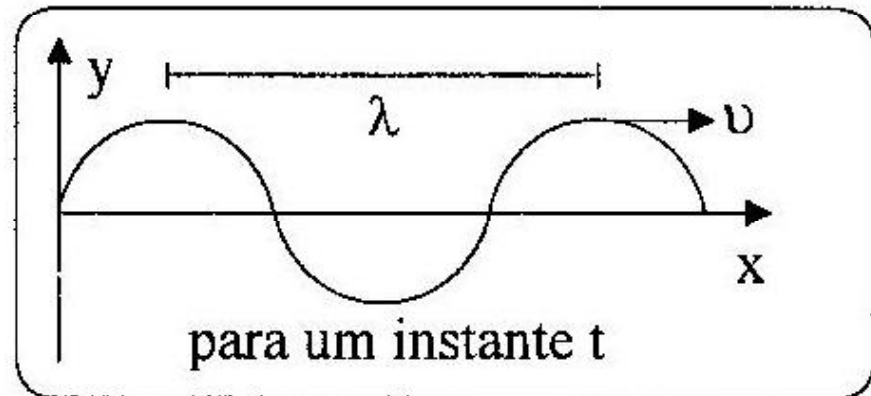
$v = \sqrt{T/\mu}$  - velocidade da onda

$T$  - tensão da corda

$\mu$  - densidade linear de massa

$\lambda$  - comprimento de onda

$K = 2\pi/\lambda$  - é o numero de onda



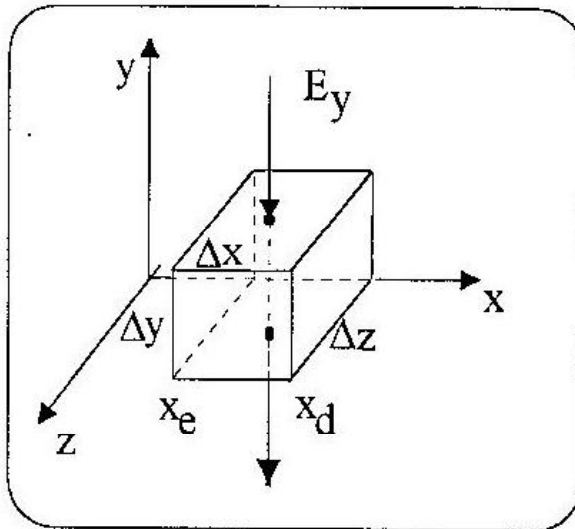
# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Cuja solução é:  $y = y_0 \text{sen}(Kx - \omega t)$  ,  $\omega = 2\pi f$

Agora mostraremos que as equações de Maxwell acarretam uma equação de onda.  
Para isso, consideremos que:

- A análise é no vácuo (sem correntes e sem cargas elétrica)
- E e B são função do tempo e uma coordenada: X ( ondas planas )

Considere o seguinte elemento de volume no vácuo:



O cálculo do fluxo elétrico através dos elementos de área:

Área  $\Delta x \Delta y$  : Campo  $E_z$  não depende de Z então  $\Phi_e = 0$

Área  $\Delta x \Delta z$  : Campo  $E_y$  não depende de Y então  $\Phi_e = 0$

Área  $\Delta y \Delta z$  : Campo  $E_x$  não depende de X.

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Então:

$$\phi_e = (E_{xd} - E_{xe}) \cdot \Delta y \cdot \Delta z = 0 \quad , \text{ pois não tem cargas internas:}$$

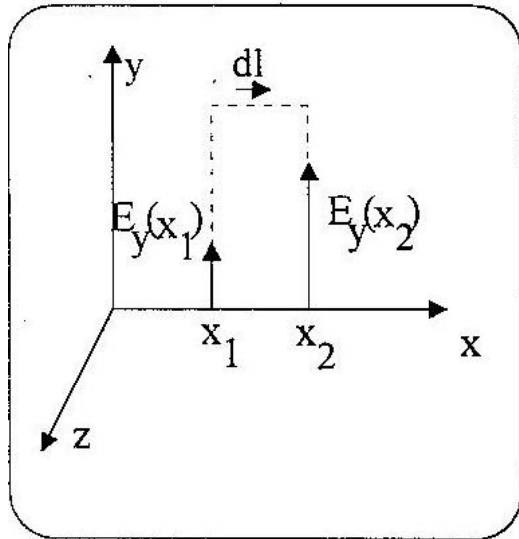
$$E_{xd} = E_{xe} \quad , \text{ logo EX não depende de x}$$

**Campo elétrico que varia no espaço deve ser perpendicular a direção de propagação**

(esta mesma análise pode ser feita para o campo magnético)

Então, vamos assumir que o campo elétrico em y ( $E_y$ ) varia com x:

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS



Pela Lei de Faraday:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= E_y(x_2) \cdot \Delta y - E_y(x_1) \cdot \Delta y \\ &= [E_y(x_2) - E_y(x_1)] \cdot \Delta y = \Delta E_y \cdot \Delta y \\ &= \frac{\Delta E_y}{\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \end{aligned}$$

As contribuições E<sub>x</sub>(x<sub>1</sub>) e E<sub>x</sub>(x<sub>2</sub>) se cancelam pois elas são iguais.

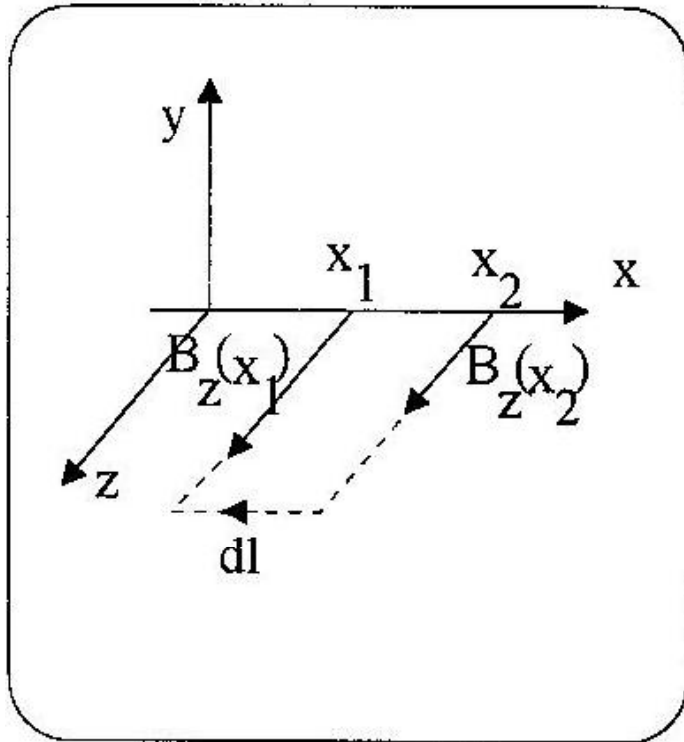
Por outro lado temos que:  $\int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = B_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y$

$$\text{Então: } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{\partial}{\partial t} (B_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y)$$

$$\text{Logo: } \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \Delta y \cdot \Delta x = -\frac{\partial}{\partial t} (B_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{Eq.(I)}$$

**Se existem uma componente E<sub>y</sub> dependente de x então deve existir uma componente B<sub>z</sub> que depende do tempo**

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS



Assumimos que exista uma componente  $B_z$  então ela depende de  $x$ .

Pela **Lei de Ampere**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Usando o procedimento anterior para cada lado da equação acima

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad Eq.(II)$$

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Derivando a equação (I) com relação a x e a equação (II) com relação a t,

Temos :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

e igualando os termos em  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \right)$ , temos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \Rightarrow \text{Equação de onda para EY}$$

Agora , derivando a equação (I) com relação a t e a equação (II) com

Relação a x e igualando os termos em  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$ , temos:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \Rightarrow \text{Equação de onda para BZ}$$

Onde a velocidade de propagação é:  $\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s} = c$  (velocidade da luz)

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A solução destas equações podem ser dadas por:

$$E_y = E_{y_0} \text{sen}(Kx - \omega t) \quad \text{e} \quad B_z = B_{z_0} \text{sen}(Kx - \omega t)$$



**derivando**

**integrando**

Já vimos que:  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = K \cdot E_{y_0} \cos(Kx - \omega t) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

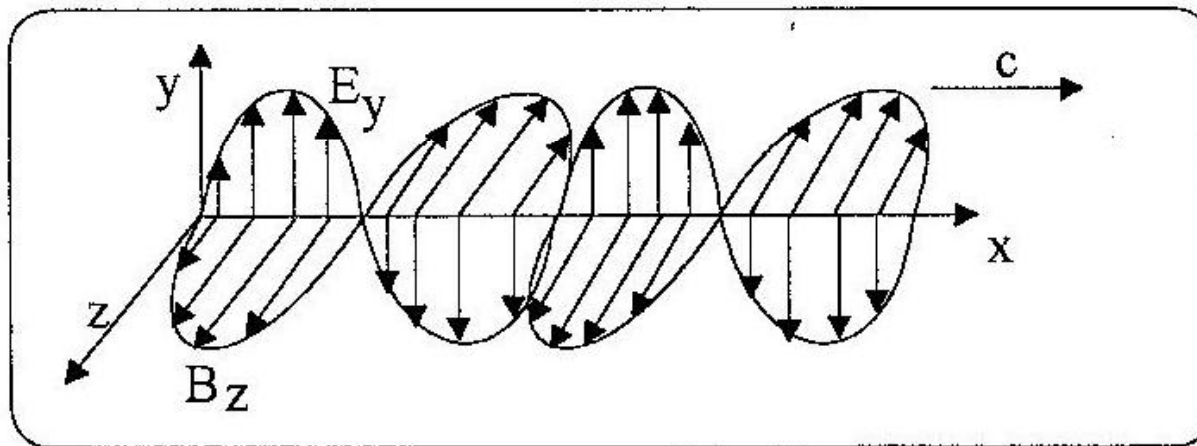
$$B_z = \frac{K}{\omega} E_{y_0} \text{sen}(Kx - \omega t) \Rightarrow \text{Logo: } B_{z_0} = \frac{K}{\omega} E_{y_0} = \frac{E_{y_0}}{c}$$

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

## Concluimos que:

- As equações de maxwell geraram equações de ondas ( eletromagnéticas ) para propagação de E e B no vácuo,
- $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e a direção de propagação,
- Estão em fase,
- Propagam-se se a velocidade da luz ( c ), e
- A direção de propagação é  $\vec{E} \times \vec{B}$

## Gráfico:



# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Vetor Poynting:  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Valor médio de S significa:

- Intensidade da onda eletromagnética ( I ),
- Energia média por unidade de tempo por unidade de área,
- Densidade do fluxo de energia.

Para vermos isso, calculamos:

- a energia por unidade de volume associada a E:

$$\eta_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(Kx - \omega t)$$

- e a energia por unidade de volume associada a B:

$$\eta_m = \frac{1}{2\pi_0} B^2 = \frac{1}{2\pi_0} B_0^2 \text{sen}^2(Kx - \omega t) \quad \text{onde} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

## AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Ou

$$\eta_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(Kx - \omega t) = \eta_e$$

Portanto a energia por unidade de volume é dada por:

$$\eta = \eta_m + \eta_e = \varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(Kx - \omega t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \text{sen}^2(Kx - \omega t)$$

Logo, a energia por unidade de área e tempo será:

$$\eta c = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \text{sen}^2(Kx - \omega t) = E_0 \text{sen}(Kx - \omega t) \cdot \frac{E_0}{\mu_0 c} \text{sen}(Kx - \omega t) = E \frac{B}{\mu_0}$$

$$\|\vec{S}\| = \eta c = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = E \cdot H$$

Logo, podemos concluir que o módulo do vetor Poynting é igual a potência Instantânea da radiação eletromagnética por unidade de área:

$$P = \int_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dA$$

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Podemos, ainda calcular o valor médio quadrático da energia por unidade de área e tempo  $\{(\text{sen}^2\theta)_{med} = 1/2\}$  que será chamada de intensidade da radiação eletromagnética (I):

$$I = c\eta_{med} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{B_0}{\mu_0 \sqrt{2}} = \frac{E_{med} B_{med}}{\mu_0} = S_{med}$$

**Pressão de radiação** ( $p_r$ ) de uma onda eletromagnética:

O momento transportado por uma onda eletromagnética é igual a energia transportada dividido por  $c$ . Logo o momento por unidade de tempo ( força ) por unidade de área (pressão) pode ser dado por:

$$P_r = \frac{I}{c}$$

# AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

**Exemplo:** Uma lâmpada de 100W emite ondas eletromagnéticas uniformes. Calcular a intensidade ( $I$ ), a pressão de radiação ( $p_r$ ) e os campos elétricos e magnéticos a 3m da lâmpada admitindo que 50W apareçam com radiação eletromagnética.

Dados: onda eletromagnética com  $P=50W$  e raio= $3m$ ,

a) Cálculo da intensidade  $I$ :

Temos que: 
$$P = \int_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow P = S_{med} A = IA \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{50}{4\pi \cdot 3^2}$$

logo:  $I = 0,442 \text{ W/m}^2$

## AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

b) Cálculo da Pressão de radiação:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{0,442}{3 \cdot 10^8} = 1,47 \cdot 10^{-9} \text{ pa}$$

(muito pequena comparada com a pressão atmosférica =  $10^5$  Pa )

c) O valor máximo do campo magnético é:  $\left( I = \frac{E_0^2}{2\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \right)$

$$B_0 = (2\mu_0 P_r)^{1/2} = [2(4\pi \cdot 10^{-7})(1,47 \cdot 10^{-9})] = 6,08 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

c) O valor máximo do campo elétrico:

$$E_0 = cB_0 = 18,2 \text{ V / m}$$

- Rodolfo franca e  
sebastiao acacio